UNIVERSITÉ DE NANTES

Master II : IS

Séries Temporelles.

Anne Philippe
Université de Nantes
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Fiche 2

Exercice 1.

Nous étudions la différence entre une marche aléatoire et un signal linéaire bruité.

1) Simuler dix marches aléatoires $(x_t)_t$ avec dérive de longueur n = 100, de paramètre $\delta = .01$ et de variance $\sigma_W^2 = 1$ pour le bruit.
2) Estimer le modèle de régression linéaire $x_t = \beta t + w_t$
3) Représenter sur un même graphique les dix droites estimées et la tendance moyenne théorique $\delta t = .01t$
4) Simuler dix séries $(x_t)_t$ de la forme $x_t = \delta t + w_t$ (tendance +bruit blanc) de longueur n = 100, de paramètre $\delta = .01$ et de variance $\sigma_W^2 = 1$
5) Estimer le modèle de régression linéaire $x_t = \beta t + w_t$
6) Représenter sur un même graphique les dix droites estimées et la tendance théorique $\delta t = .01t$
7) Commenter les résultats

Exercice 2.

Vous pourrez utiliser les fonctions `ts, acf` et `diff` .

1) Écrire une fonction qui retourne une série simulée de la forme

$$X_j = a\cos(\omega j) + bj + \varepsilon_j$$

où (ε_n) un bruit blanc gaussien centré et de variance 1.
Les paramètres d'entrée de la fonction sont n, a, b, ω et la sortie est une série temporelle.
On fixe $n = 100$ puis $n = 500$
2) Pour $a = 0$ et $b = .01$.
simuler une trajectoire, puis représenter
   2-1) la série et sa suite d'auto-corrélations empiriques
   2-2) la série $X_n - X_{n-1}$ et sa suite des auto-corrélations empiriques
3) Pour $b = 0$, $a = 2$ et $\omega = \pi/6$
simuler une trajectoire, puis représenter
   3-1) la série et sa suite des auto-corrélations empiriques
   3-2) la série $X_n - X_{n-12}$ et sa suite des auto-corrélations empiriques

Exercice 3.

1) Ecrire une fonction pour simuler des trajectoires de processus défini par l'équation de récurrence

$$X_n + aX_{n-1} = \varepsilon_n$$

où (ε_n) est une suite de variables aléatoires centrées iid.

Indication : Pour obtenir une série de longueur n, simuler $n+100$ valeurs et supprimer les 100 premières valeurs pour atténuer l'effet de l'initialisation. Vous pouvez utiliser la fonction `filter`.

2) Pour $|a| = 0, .5, .9$, tracer une trajectoire simulée et sa suite des auto-corrélations empiriques.
3) Commenter les résultats

EXERCICE 4. *Données des ventes de champagne*

Le fichier `champ.asc` est disponible sur le web à l'adresse suivante
`http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/lecture/champ.asc`
On note (C_t) la série.

1) Tracer la série (C_t) et sa suite des auto-corrélations empiriques.
2) En utilisant les résultats de l'exercice précédent, peut-on détecter la présence d'une fonction périodique ou d'une tendance dans cette série.
3) Tracer la série $(log(C_t))$ et sa suite des auto-corrélations empiriques.
4) Pour différentes valeurs des paramètres (a, b, c), simuler des séries de longueur 100 de la forme

$$at + b\cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + c\cos\left(\frac{2\pi t}{6}\right) + b'\sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + c'\sin\left(\frac{2\pi t}{6}\right) + \varepsilon_t \tag{1}$$

où (ε_t) est une suite de variables aléatoires i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$

5) Comparer l'allure des séries simulées avec la série des ventes de champagne et la série $(log(C_t))$.
6) Pour laquelle des deux séries $((C_t))$ $(\log(C_t))$, le modèle défini en (1) vous semble le plus pertinent.
7) Sur cette série, calculer les estimateurs de (a, b, c) par la méthode des moindres carrés. Que peut-on dire de la qualité du modèle. Peut on modéliser la série des résidus par un bruit blanc?

EXERCICE 5.

On considère la série temporelle définie par

$$X_j = aj + cos(\frac{1}{6}\pi j) + \varepsilon_j \quad \forall j \in N$$

où (ε_j) un bruit blanc de variance égale à 1. On définit les opérateurs

$$H = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}B^6 + B^5 + ... + B + I + B^{-1} + ... + B^{-5} + \frac{1}{2}B^{-6}\right)$$
$$A = (I - B) \circ H$$
$$G = I - B^{12}$$

1) Montrer que les filtres A et G éliminent la tendance et la saisonnalité de la série (X_t)
2) Comparer les variances de $A(\varepsilon)_n$ et $G(\varepsilon)_n$.