UNIVERSITÉ DE NANTES

Master II : IS

Séries Temporelles.

Anne Philippe
Université de Nantes
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Fiche 1

Exercice 1.

Installer la librarie R `astsa`

Exercice 2.

Considérons un modèle signal-plus-bruit de la forme $x_t = s_t + w_t$, où w_t est un bruit blanc gaussien avec $\sigma_w^2 = 1$

1) Simuler et tracer n = 200 observations pour chacun des deux modèles suivants.

(a)
$$s_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 1, ..., 100 \\ 10e^{-(t-100)/20}\cos(2\pi t/4), & \text{si t = 101,...,200.} \end{cases}$$

(b)
$$s_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 1, ..., 100 \\ 10e^{-(t-100)/200}\cos(2\pi t/4), & \text{si t = 101,...,200.} \end{cases}$$

2) Comparer l'aspect général des séries definies en (a) et (b) avec la série des tremblements de terre `EQ5` et la série d'explosions `EXP6` . Ces données sont disponibles dans la librairie `asta`.

Exercice 3.

Supposons que $X_t = \mu + w_t + \theta w_{t-1}$ où $w_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$

1) Montrer que pour tout t la moyenne est $E(X_t) = \mu$
2) Montrer que la fonction d'autocovariance de X_t est égale à $\gamma(t, t+h) = \gamma(h)$ avec
   - $\gamma(0) = \sigma_W^2(1 + \theta^2)$,
   - $\gamma(\pm 1) = \sigma_W^2\theta$
   - $\gamma(h) = 0$ si $|h| \geq 2$.
3) Quelle est la fonction d'autocorrélation ?
4) Montrer que X_t est strictement stationnaire pour toutes les valeurs de θ si w_t est un bruit blanc fort (c'est à dire $W_t \sim$ iid(0,σ_W^2)

Exercice 4.

Soit $(w_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ des variables iid suivant la loi normale $N(0, \sigma^2)$. On définit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par

$$X_t = w_t w_{t-1},$$

pour tout entier t

1) Montrer que la loi de X_t ne dépend pas de t
2) Vérifier que X_0 est dans L^P pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

3) Déterminer la moyenne du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
4) Calculer la fonction d'autocovariance du processus.
5) Ce processus est il stationnaire?
6) Ce processus est il un bruit blanc ?
7) Ecrire sa fonction d'autocorrélation. .
8) Ce processus est il strictement stationnaire?

Exercice 5.

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus gaussien c'est à dire pout tout k et tout $(t_1, ..., t_k)$, le vecteur $(X_{t_1}, .., X_{t_k})$ est un vecteur gaussien.

On suppose que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire de moyenne $\mu = 0$ et d'autocovariance γ

On pose pour tout entier t :

$$Y_t = e^{X_t}.$$

1) Justifier que le processus est stationnaire.
2) A t fixé, calculer $E(Y_t)$ en fonction de $\gamma(0)$
3) Quelle est la loi de $X_t + X_s$?
4) Quelle est la fonction d'autocovariance du processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?

Exercice 6.

On considère la série temporelle $X_t = Y_t + W_t$ où W est un bruit blanc $iidN(0,1)$ et $Y_t = at + b$ pour $t = 1, ..., n$.

1) Montrer que la fonction d'autocorrélation empirique de (Y_t) vérifie
$$\hat{\rho}_Y(h) \to 1 \text{ quand } n \to \infty$$
2) Simuler et tracer n observations du processus X_t pour différentes valeurs de n et a
3) Tracer la fonction d'autocorrélation empirique de $X_1, ..., X_n$ pour differentes valeurs de a et n. `utiliser la fonction ACF`
4) Commenter les résultats.

Exercice 7.

On considère la série temporelle $X_t = Z_t + W_t$ où W est un bruit blanc $iidN(0,1)$ et

$$Z_j = a\cos(\omega j)$$

pour $j \in \{1, \cdots, n\}$ où a et ω sont des constante avec $c \neq 0$ et $\omega \in]-\pi, \pi[$.

1) Montrer que la fonction d'autocorrélation empirique de (Z_t)
$$\lim_{n\to\infty} \hat{\rho}_Z(h) = cos(\omega h)$$
Indication :
$$\sum_{j=1}^{n} \cos((j+l)\theta) = \cos\left(\left(\frac{n+1}{2} + l\right)\theta\right) \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$
et pour tout (a, b)
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$
2) Simuler et tracer n observations du processus X_t pour différentes valeurs de n et c, ω
3) Tracer la fonction d'autocorrélation empirique de $X_1, ..., X_n$ pour differentes valeurs de n et c, ω
4) Commenter le résultat.